

Fysiikan Mittausmenetelmät
Syksy 2021
Laskuharjoitus 1 - Metrologia ja näytteistäminen

1.

a) 200 Hz näytteistystaajuudella Nyquistin taajuus on 100 Hz ja 180 Hz:lla taas 90 Hz. Mitatut taajuuden muutokset johtuvat rajataajuuden ylittävän signaalin laskostumisesta (aliasing).

b) Laskostuneille signaaleille $|f - f_N| = |f_N - f_A|$, missä f on signaalin todellinen taajuus, f_N Nyquistin taajuus ja f_A mitattu laskostunut signaali. Ensimmäisen mittauksen perusteella $|f_N - f_A| = 20$ Hz, joten f :n täytyy olla 20 Hz suurempi kuin f_N , eli 120 Hz. Toisessa mittauksessa $|f_N - f_A| = 30$ Hz ja samoin perustein signaalin taajuus on oikeasti 30 Hz suurempi kuin 90 Hz eli 120 Hz.

c) Mittaustulos on liipaisutasosta riippuva DC-vakiojännite, jos näytteistystaajuus on sama kuin signaalin taajuus eli 120 Hz.

2.

Kovarianssi määritellään matemaattisesti kahden (satunnais)muuttujan X ja Y välillä seuraavasti:

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n}$$

Käytännössä kovarianssi on kahden muuttuja välisen riippuvuuden mitta. Kovarianssi on sitä suurempi mitä suurempi positiivinen lineaarinen riippuvuus muuttujien välillä on. Esimerkiksi mitä lämpimämpi ilma ulkona on, sitä enemmän jäätelöä ostetaan. Negatiivinen kovarianssi kertoo negatiivisesta lineaarisesta riippuvuudesta. Mitä lämpimämpi ulkona on, sitä vähemmän toppatakkeja ostetaan. Jos muuttujien välillä ei ole riippuvuutta, tai riippuvuus ei ole lineaarinen, kovarianssi on nolla. Ulkolämpötilan ja ohi kiitävien autojen värien välillä ei ole riippuvuutta.

(Ei vaadita vastaukseen:) Odotusarvo on "satunnaismuuttujan jakauman painopiste", usein mitattujen arvojen keskiarvo. Huom. Tutumpi varianssi, $\text{var}(X) = \text{cov}(X, X)$. Korrelaatio(kerroin) on kovarianssi skaalattuna välille $-1 \dots 1$.

b) Kovarianssi voi olla haitaksi tutkimuksessa, mikäli sitä esiintyy muiden kuin mitattavien muuttujien välillä. Kovarianssin takia tutkimuksen johtopäätökset saattavat olla väärät. Esimerkkinä tutkimus, jossa tutkitaan laihdutusvalmisteen tehoa miesten ja naisten välillä. Tutkimuksessa havaitaan, että miehet laihtuvat (kilogrammoissa mitattuna) keskimäärin enemmän kuin naiset. Kuitenkin, mikäli miesten lähtöpaino on suurempi kuin naisten, kovarianssi lähtöpainon ja laihdutettujen kilojen välillä voi selittää löydettyt sukupuolierot. *Laihdutusvalmiste ei siis tehoa miehiin paremmin kuin naisiin, vaan se toimii painavampiin ihmisiin paremmin kuin kevyempiin ihmisiin.* Huom, jos painonmuutos suhteutetaan alkupainoon (mitataan siis suhteellinen painonmuutos), ero miesten ja naisten välillä ei juuri ja juuri ole tilastollisesti merkittävä. Tämä on siis yksi tapa ottaa alkupaino huomioon, kovariaatti (katso kohdan c) vastaus) on toinen.

c) Regression to Mean (RTM) on tilastollinen artefakti, joka on läsnä aina kun muuttujaa mitataan kahdesti tai useammin, ja tähän muuttujaan liittyy satunnaista vaihtelua. (Tapaus, jossa muuttuja on normaalijakautunut, on ehkä helpoin ymmärtää, koska siinä keskivertoarvojen saaminen on todennäköisempää kuin laita-arvojen saaminen.) Esimerkiksi pallonheittokilpailussa jokainen henkilö heittää palloa kahdesti. Tuloksiin vaikuttaa kilpailijan kykyjen lisäksi myös satunnaiset tekijät. Kilpailussa henkilö, joka sattumalta heittää tavallista pidemmälle, heittää todennäköisesti seuraavaksi lyhyemmälle. Toisaalta, kilpailija joka sattumalta heittää tavallista heikommin, todennäköisesti heittää seuraavalla kerralla pidemmän heiton. Toisin sanoen, selkeästi normaalia lyhyemmän tai pidemmän heiton jälkeen tulee yleensä heitto, joka on lähempänä kilpailijan keskiarvosuoritusta. Tämä toimii myös käänteisesti: jos toinen heitto on selkeästi tavallista pidempi/lyhyempi, ensimmäinen heitto on todennäköisesti ollut lähempänä keskiarvoa.

Mitäpä jos ensimmäisen heiton jälkeen valitaan huonoimmat heittäjät ja tutkitaan parantaako kannustuspuhe heidän toisen heittonsa tuloksia? RTM efekti pitää huolen, että todennäköisesti tämän ryhmän tulokset paranevat kannustuspuheesta riippumatta.

(Tästä eteenpäin ei vaadita vastaukseen:) ANOVAssa (analysis of variance) eli varianssianalyysissä tutkitaan eroavatko kahden tai useamman ryhmän keskiarvot toisistaan tilastollisesti merkittävästi. ANCOVAssa (analysis of covariance) eli kovarianssianalyysissä huomioidaan lisäksi itse tutkittavien muuttujien lisäksi apumuuttujia, joita kutsutaan kovariaateiksi. Kohdan b) esimerkissä henkilöiden lähtöpaino voisi olla tällainen kovariaatti. Tällöin tutkimuskysymys kuuluisi, vaikuttaako laihdutusvalmiste miesten tai naisten painoon eri tavalla, *mikäli heidän alkupainonsa olisi sama*. Kovariaatti on siis muuttuja, joka saattaa vaikuttaa tutkimuksen tuloksiin, ja joka tulisi ottaa huomioon, mutta joka ei ole suoranaisesti kiinnostava tutkimuksen kannalta. Kovarianssianalyysillä voidaan poistaa RTM artefaktia valitsemalla henkilöiden ensimmäisen heiton tulos kovariaatiksi. (Liitteenä esimerkkejä miten kovariantti laiminlyönti voi vaikuttaa)

d)

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10	O11	O12
läsnäolo	0.8	0.0	0.9	0.2	0.7	0.6	1.0	0.4	0.6	0.8	0.7	0.2
Arvosana	3	1	5	4	4	3	4	2	3	4	3	2

$$Cov(X, Y) = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n}$$

lasketaan keskiarvot

läsnäolo $\bar{X} = 0.575$

arvosana $\bar{Y} = 3.1666 \dots$

lasketaan jokaisen arvon etäisyys keskiarvosta

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10	O11	O12
$X_i - \bar{X}$	0,23	-0,58	0,33	-0,35	0,09	0,02	0,39	-0,20	0,00	0,23	0,12	-0,38
$Y_i - \bar{Y}$	-0,17	-2,17	1,83	0,82	0,62	-0,21	0,84	-1,09	0,10	0,98	-0,12	-1,12

kerrotaan vastaavat arvot

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10	O11	O12
$(X_i - \bar{X}) * (Y_i - \bar{Y})$	-0,04	1,25	0,60	-0,29	0,06	-0,01	0,33	0,22	0,00	0,23	-0,01	0,43

summataan arvot

$$\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 2.75$$

jaetaan arvojen lukumäärällä

$$Cov(X, Y) = 0.229 \dots \approx 0.2$$

3.

a) Answer:

According to BIPM (link <http://www.bipm.org/en/bipm/calibrations/traceability.html>)

"property of a measurement result whereby the result can be related to a reference through a documented unbroken chain of calibrations, each contributing to the measurement uncertainty"

Usually the "reference" is corresponding SI unit e.g. meter in the case of dimensional measurements. Thus we typically speak of traceability to SI units.

Points for correctly mentioning 3 key things:

"documented unbroken chain of calibrations/comparisons"

"each contributing to the measurement uncertainty"/"stated uncertainties"

"reference"/"definition of SI-unit"

b) "Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement" (GUM). GUM "establishes general rules for evaluating and expressing uncertainty in measurement that defines how error sources should be handled and combined together."

Link: http://www.bipm.org/utis/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf

c) Good answer should either have at least 3 of the listed error sources

Possible error sources:

Light source:

-light intensity variations

-thermal drift on the light source, possible effects of light spectrum changes (effect of this depends on data analysis software)

Camera:

-quantization of light intensity values (e.g 8 bit camera)

-shot noise of the camera

Optomechanical setup:

-Vibration of the instrument

-alignment of the optical setup and piezo

-focusing of the optics (are the fringes visible at best focus)

- thermal and other drift of the setup e.g. sample holder

Other:

-bat wing effect close to vertical steps or steep gradients (mixing of fringes from top and bottom, also depends on the data analysis)

4.

Reasons to run experiments:

- (i) to determine the principal causes of variation in a measured response
- (ii) to find the conditions that give rise to a maximum or minimum response
- (iii) to compare the responses achieved at different settings of controllable variables
- (iv) to obtain a mathematical model in order to predict future responses.

In our case ... To be most efficient we want to measure the amount of sunlight, water, fertilizer, and soil quality in the same time (i.e. a factorial experiment). The checklist for planning experiments:

- (a) Define the objectives of the experiment.
- (b) Identify all sources of variation, including:
 - (i) treatment factors and their levels,
 - (ii) experimental units,
 - (iii) blocking factors, noise factors, and covariates.
- (c) Choose a rule for assigning the experimental units to the treatments.
- (d) Specify the measurements to be made, the experimental procedure, and the anticipated difficulties.
- (e) Run a pilot experiment.
- (f) Specify the model.
- (g) Outline the analysis.
- (h) Calculate the number of observations that need to be taken.
 - (i) Review the above decisions. Revise, if necessary.

Only a-d need to be fulfilled for the sake of the problem. In the problem, it is more important to show that the student has given thought to the pointers rather than the student fulfilling some precise set of answers. But a good answer will be detailed below:

(a) Define the objectives of the experiment.

The objective of the experiment is to study the growth of (*insert flower species here*) in normal/abnormal (*insert climate here*) conditions. It is important to specify the flower species, as different species require different conditions for healthy growth. Or, if we are studying how a specific garden grows during a season (with a multitude of known species), we can limit the experimental conditions that way. Similarly, defining the climate we are working with will limit the experimental conditions. It might not be fruitful to study how a flower native to the Amazon grows in a Finnish climate (unless this is something you are specifically interested in). But, it could be interesting to study Finnish flowers in a mediterranean climate (as you might be able to study the effects of climate change in the growth of Finnish flowers). Nevertheless, defining the objective of the experiment clearly helps you to determine the experimental conditions.

Below you can find a pretty much perfect answer (submitted by a student in 2022):

a) Define the objectives of the experiment. Tutkimuksen tavoitteena on selvittää, miten auringon valo, kastelu, lannoitteet ja maanlaatu vaikuttavat kukkien kasvuun puutarhassa. Kysymykset, joihin tutkimus yrittää vastata ovat siis: miten auringon valon määrä vaikuttaa kukkien kasvuun? Miten kastelun määrä vaikuttaa kukkien kasvuun? Miten lannoitteen käyttö/käyttämättömyys vaikuttaa kukkien kasvuun?

Miten erilaiset maanlaadut vaikuttavat kukkien kasvuun?

b) Identify all sources of variation, including: huom, jokaiselle muuttujalle on eri laatikkosetit puutarhassa.

i. Treatment factors and their levels. Tutkimuksessa tutkitaan muuttujien auringon valo, kastelu, lannoitteet ja maanlaatu vaikutusta kukkien kasvuun. Auringon valoa varten yksi kasvilaatikko jätetään ilman suojaa auringolta, toinen laatikko (muiden muuttujien osalta identtinen ensimmäisen kanssa) saa puolet auringonvalosta filttteröivan suojan, kolmas laatikko saa kolmeneljäsosaa auringonvalosta filttteröivän suojan jne. Kontrollia varten voi olla myös yksi laatikko kokonaan pimeydessä.

Kastelua varten ensimmäinen kasvilaatikko saa kerran vuorokaudessa litran vettä. Toinen laatikko, jolla taas muut muuttujat paitsi kastelu ovat identtisiä ensimmäisen kastelulaatikon kanssa, saa kerran vuorokaudessa puoli litraa vettä. Kolmas laatikko saa 2.5 desilitraa jne. Laatikot ovat kasvihuoneessa, joten sateen vaikutusta ei tarvitse huomioida. Kontrollia varten voi olla myös yksi laatikko kokonaan ilman kastelua.

Tutkitaan nyt kahta eri lannoitetta, luomulannoitetta ja kemiallista. Molemmat saavat yhden laatikon, joka istutuksen mukana lannoitetaan kolmella desilitralla lannoitetta. Toiset laatikot lannoitetaan kahdella desillä, kolmannet yhdellä jne. Kontrollia varten voi olla myös yksi laatikko kokonaan ilman lannoitetta.

Maanlaadun tutkimiseksi istutetaan kolme laatikkoa. Ensimmäiseen laitetaan yksi neljäsosa multaa ja kolmeneljäsosaa hiekkaa, toiseen puolet ja puolet multaa ja hiekkaa, kolmanteen neljäsosa hiekkaa ja kolmeneljäsosaa multaa. Kontrollia varten voi olla myös yksi laatikko kokonaan mullassa ja yksi kokonaan hiekassa.

ii. Experimental units. Istutuslaatikoiden määrä voidaan valita sen mukaan, miten tarkkoja tuloksia halutaan. Jos halutaan tarkkuus, että enemmän/vähemmän auringonvaloa on paremmaksi kukille, voidaan tämän muuttujan tutkimukseen valita kaksi laatikkoa. Jos halutaan

tarkempia tuloksia, laatikkoja voidaan valita mielivaltaisen määrä. Tutkimuksessa laatikoihin valittaisiin muutama yleinen puutarhakukka. Kukkien pituus, leveys ja kukintojen määrä tarkastettaisiin päivittäin samaan aikaan. Tutkimuksen tulokset rajoittuvat siis valittujen kukkien kasvuvaatimuksiin ja valittujen lannoitteiden/maa-aineisten ominaisuuksiin.

iii. Blocking factors, noise factors, and covariates. Häiriötä tutkimukseen voi aiheuttaa muun muassa lämpötila, sade, hyönteiset ja kasvien sairaudet. Lämpötilaa varten tutkimus voidaan pitää vakiona tutkimuksen aikana, mutta silloin tutkimustulokset pätevät vain tälle kyseiselle lämpötilalle. Tutkimus voidaan esimerkiksi toistaa eri lämpötiloissa. Sade voidaan minimoida pitämällä laatikot kasvihuoneessa. Sairaudet ja hyönteiset voidaan minimoida levittämällä kaikille kasveille lääkettä ja/tai karkotinta.

c) Choose a rule for assigning the experimental units to the treatments. Jokainen muuttuja saa tietyn määrän laatikoita, joiden muut olosuhteet pysyvät vakioina, paitsi valitun muuttujan määrä/laatu. Tutkimus ei siis ota kantaa tutkittavien muuttujien yhteisvaikutukseen kukkien kasvuun.

d) Specify the measurements to be made, the experimental procedure, and the anticipated difficulties. Kasvien korkeudessa ja leveydessä erot päivän kasvun jälkeen saattavat olla hyvin pieniä, eli mittausten tulee olla tarkkoja (esimerkiksi yhden millimetrin tarkkuudella). Kasvien korkeus mitataan mullasta (/hiekasta) kasvin korkeimpaan kohtaan. Leveys mitataan leveimmästä kohdasta, mutta kuitenkin jotain laatikon sivua myötäillen. Kukintojen määrään lasketaan mukaan nuput. Vaikeuksia saattaa tulla esimerkiksi kukintojen laskemisessa, korkeuden/leveyden mittaamisessa, kukkien laadussa, kukkien alkukunnossa ja maalaatujen yhtenäisyydessä.

Esimerkki miten kovariaatin huomioimatta jättäminen voi vääristää tuloksia:

Tarkastellaan b)-kohdan esimerkkiä. Taulukossa 1 on mittaustulokset miesten ja naisten painosta ennen ja jälkeen laihdutusvalmisteen käyttöä. Keskimäärin näyttäisi siltä, että laihdutusvalmiste on vähentänyt miesten painoa enemmän kuin naisten painoa ($13,5 \pm 10,1$ kg vs. $5,5 \pm 5,2$ kg). Jos unohtamme henkilöiden alkupainot ja teemme tilastollisen ANOVA-testin (tässä tapauksessa pelkkä t-testi), jossa vertaamme onko miesten ja naisten painojen *muutoksilla* eroa, saamme tulokseksi, että on: "Sig." eli $p=0.038$. p-arvoja, jotka ovat pienempiä kuin 0.05, voidaan pitää tilastollisesti merkittävänä. Tämä näkyy Taulukosta 2, joka on tehty käyttäen SPSS-ohjelmaa (SPSS löytyy ohjelmistojakelusta, myös Matlabilla jonkinlaiset ANOVA/ANCOVA valmiudet. Huom, Matlabissa ANCOVA on nimellä ANOCOVA. Excelillä pystytään vain ANOVAan ja tarvittavat Analyysityökalut).

Taulukko 1. Laihdutusvalmistetutkimus.

	Miehet			Naiset		
	Alkupaino (kg)	Loppupaino (kg)	Muutos (kg)	Alkupaino (kg)	Loppupaino (kg)	Muutos (kg)
	120	100	20	89	78	11
	110	90	20	78	77	1
	98	76	22	88	80	8
	105	100	5	109	109	0
	89	88	1	110	100	10
	79	80	-1	115	101	14
	109	80	29	85	80	5
	108	99	9	95	97	-2
	90	70	20	80	75	5
	100	90	10	79	76	3
Keskiarvo	100.8	87.3	13.5	92.8	87.3	5.5
Hajonta	12.2	10.6	10.1	13.9	12.9	5.2

Jos teemme saman testin uudestaan, mutta otamme henkilöiden alkupainon huomioon kovariaattina (ANCOVA), saamme tulokseksi, että miesten ja naisten painojen muutoksilla ei olekaan eroa ($p=0.113$). Tämä näkyy Taulukossa 3.

Taulukko 2. ANOVA (ei alkupaino-kovariaattia).¹

¹

- Varianssianalyysin avulla datassa esiintyvä vaihtelu, jota kuvataan neliösummilla ("Sum of squares"), hajoitetaan eri lähteistä peräisin oleviin osiin. "Sukupuoli"-neliösumma kuvaa sukupuolten välisistä eroista johtuvaa vaihtelua painonmuutoksessa. Tästä rivistä olemme erityisen kiinnostuneita. "Corrected Model"-neliösumma kuvaa kaikkien faktorien yhteisvaikutuksen vaihtelua. Koska tässä mallissa on vain yksi faktori, 'Sukupuoli' (jossa on kaksi ryhmää, miehet ja naiset), "Corrected Model"-neliösumma on sama kuin "Sukupuoli"-neliösumma. "Error"-neliösumma kuvaa sitä osaa vaihtelusta, jota ei kyetä selittämään ryhmien (tässä miehet vs. naiset) välisillä eroilla. "Intercept"-neliösumma kertoo koko datan poikkeamisesta nolasta. Yleensä tämä termi ei ole kiinnostava. "Total"-neliösumma kuvaa aineiston kokonaisvaihtelua. "Corrected Total"-neliösumma on faktorien yhteisvaikutuksen ja virheen vaihtelu, eli "Corrected Total"-neliösumma = "Corrected Model"-neliösumma + "Error"-neliösumma. "Type III"

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: 'Muutos'

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	320.000 ^a	1	320.000	4.996	.038
Intercept	1805.000	1	1805.000	28.179	.000
Sukupuoli	320.000	1	320.000	4.996	.038
Error	1153.000	18	64.056		
Total	3278.000	20			
Corrected Total	1473.000	19			

a. R Squared = .217 (Adjusted R Squared = .174)

Taulukko 3. ANCOVA (alkupaino-kovariaatti huomioitu).²

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: 'Muutos'

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	559.116 ^a	2	279.558	5.200	.017
Intercept	99.124	1	99.124	1.844	.192
Alkupaino	239.116	1	239.116	4.448	.050

viittaa tapaan, jolla varianssin hajotelma on tehty. "Type III" on yleisin, eikä muita tyyppejä joudu yleensä käyttämään.

- Tilastolliseen testaukseen (p-luvun laskemiseen) tarvitaan eri osien variansseja. Neliösummat eivät suoraan kelpaa varianssien estimaateiksi, vaan neliösummat täytyy jakaa vapausasteillaan: "df", degrees of freedom, eli vapausasteiden lukumäärä. Neliösumman vapausasteluku on siinä olevien yhteenlaskettavien lukumäärä vähennettynä estimoitujen keskiarvojen lukumäärällä. Esim. $df_{Sukupuoli} = k - 1$, $df_{Error} = k * n - k$, $df_{CorrTotal} = k * n - 1$, missä k =ryhmien lukumäärä=2 ja n =havaintojen (henkilöiden) lukumäärä ryhmää kohden=10.
- Kun neliösummat jaetaan vapausasteluvuillaan, saadaan eri vaihtelulähteisiin liittyvät keskineliöt ("Mean Square").
- F-suhde on testisuure, johon ryhmien keskiarvojen vertailu perustuu. Se on ryhmien välisen vaihtelun ja ryhmien sisäisen vaihtelun suhde. Esimerkiksi $F_{Sukupuoli} = \text{MeanSquare}_{Sukupuoli} / \text{MeanSquare}_{Error}$. Mitä suurempi $F_{Sukupuoli}$ on, sitä suurempi sukupuolten välisten painonmuutosten vaihtelu on verrattuna sukupuolten sisäisten painonmuutosten vaihteluun.
- "Sig" eli p-arvo kertoo tilastollisesta merkittävyydestä. Mitä pienempi p-arvo, sitä merkittävämpi efekti. $p < 0.05$ pidetään usein tilastollisen merkittävyyden rajana. p-arvon saa F-jakauman taulukosta (tai esim. Matlabilla: $1 - \text{fcdf}(F\text{-suhde}, df_1, df_2)$) kun tietää F-suhteen osoittajan ("se ylempi") ja nimittäjän ("se alempi") vapausasteet. Esim. $F_{Sukupuoli} = \text{MeanSquare}_{Sukupuoli} / \text{MeanSquare}_{Error} = 4.996$. $df_1 = df_{Sukupuoli} = 1$, $df_2 = df_{Error} = 18$.

² Mallin vapausasteluku ("Corrected Model", df), on kovariaatista johtuen $2: df_{CorrModel} = k - 1 + N_{cov}$, jossa $k=2$ =ryhmien määrä (naiset ja miehet) ja $N_{cov}=1$ =kovariaattien määrä (alkupaino).

Sukupuoli	150.308	1	150.308	2.796	.113
Error	913.884	17	53.758		
Total	3278.000	20			
Corrected Total	1473.000	19			

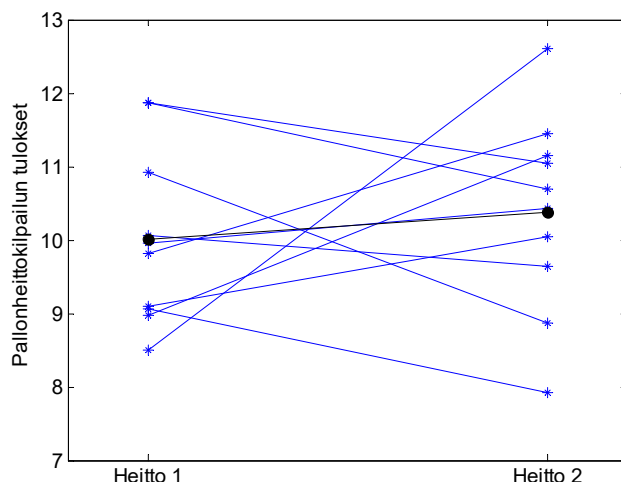
a. R Squared = .380 (Adjusted R Squared = .307)

Esimerkki RTM:n vaikutuksista tuloksiin ja miten ANCOVA poistaa RTMn.

Edellisessä esimerkissä ei kyseessä ollut RTM:n vaikutus mittaustuloksiin, sillä toisiinsa verrattavat muuttujat (naisten painonmuutos ja miesten painonmuutos) olivat toisistaan riippumattomia. Palataan pallonheittokilpailuun. Tämän esimerkin toistomittauksessa ("repeated measures design") RTM on selvässä roolissa. Kymmenen ihmistä kilpailee pallonheittokilpailussa. Jokainen heittää kahdesti. Tutkimuksessa halutaan tietää paraneeko tulos toisella heitolla. Taulukossa 4 on Heittojen 1 ja 2 tulokset. Data on simuloitua ($\text{Heitto1}_i = 10 + \varepsilon_i$ ja $\text{Heitto2}_j = 10.5 + \varepsilon_j$, jossa $i=1:10$ ja $j=1:10$ ja ε_i ja ε_j ovat normaalijakautuneita, satunnaisia virheitä, joiden keskiarvo on 0 ja hajonta 1), joten tiedämme, että Heittojen 2 pitäisi olla keskimäärin 0.5 pistettä suurempi (tulokset paranevat kuitenkin keskimäärin vain 0.4 pistettä (10.4-10) johtuen otoksen pienestä koosta). Tärkeää: kuvaajasta 1 näkee RTM efektin, eli että henkilöt, joiden ensimmäinen heitto oli keskimääräistä isompi, seuraava heitto oli yleensä pienempi ja toisinpäin.

Taulukko 4. Pallonheittokilpailun tulokset

Henkilö#	Heitto 1	Heitto 2
1	9.81	11.45
2	11.86	10.70
3	8.50	12.60
4	8.98	11.15
5	9.06	7.92
6	10.92	8.87
7	9.95	10.43
8	11.86	11.04
9	9.09	10.05
10	10.07	9.64
Keskiarvo	10.0	10.4
Hajonta	1.2	1.3



Kuva 1. Taulukon 4 Pallonheittokilpailun tulokset. Musta viiva on kummankin heiton keskiarvoviiva.

RTM-efekti voidaan poistaa.

Voimme toistaa edellisen esimerkin tilastolliset testit (ottaen huomioon toistomittaukset, eli käyttäen "repeated measures design"-vaihtoehtoa). Ensin vertaamme ensimmäistä ja toista

heittoa toisiinsa ja tämän jälkeen toistamme testin liittämällä ensimmäisen heiton tuloksen kovariaatiksi. Ilman kovariaattia tehdyssä tilastollisessa testissä ei näy eroa ensimmäisen ja toisen heiton välillä (vaikka tiedämme että oikea tulos on $ero = +0.5$, Taulukko 5), mutta kovariaatin lisäämisen jälkeen heittojen välillä näkyy tilastollinen ero (Taulukko 6). Ensimmäinen heitto -kovariaatin lisääminen siis poisti RTM-artefaktin ottamalla huomioon heittojen riippuvuuden ensimmäisestä heitosta.

Taulukko 5. ANOVA (ei Heitto1-kovariaattia)³

Tests of Within-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1

Source		Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Heitto	Sphericity Assumed	.703	1	.703	.399	.543
	Greenhouse-Geisser	.703	1.000	.703	.399	.543
	Huynh-Feldt	.703	1.000	.703	.399	.543
	Lower-bound	.703	1.000	.703	.399	.543
Error(Heitto)	Sphericity Assumed	15.857	9	1.762		
	Greenhouse-Geisser	15.857	9.000	1.762		
	Huynh-Feldt	15.857	9.000	1.762		
	Lower-bound	15.857	9.000	1.762		

Taulukko 5. ANCOVA (Heitto1-kovariaatti huomioitu)

³ "Sphericity" eli sfäärisyys ("pallomaisuus") tarkoittaa ryhmien välisten erojen varianssien yhtäsuuruutta. Se on yksi oletuksista, jonka erityisesti toistomittausdatan on täytettävä, jotta ANOVA/ANCOVA voidaan tehdä luotettavasti. Tässä esimerkissä sillä ei ole juurikaan väliä, koska ryhmiä on vain 2 (Heitto1 ja Heitto2) ja ryhmien välille voi laskea vain yhden ryhmien välisen eron (Heitto1-Heitto2), joten erojen variansseja ei voi verrata. Sfäärisyyden voi testata Mauchly's Test of Sphericity -testillä. Mikäli sfäärisyyden oletusta ei ole rikottu, p-arvon ("Sig.") voi lukea riviltä "Sphericity assumed", muuten p-arvo on luettava seuraavilta kolmelta riviltä, joilla on eri tavoin pyritty huomioimaan sfäärisyys ehdon rikkoutuminen. Käytännössä "Lower-Bound" -korjausta ei enää käytetä.

Tests of Within-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1

Source		Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Heitto	Sphericity Assumed	8.258	1	8.258	8.225	.021
	Greenhouse-Geisser	8.258	1.000	8.258	8.225	.021
	Huynh-Feldt	8.258	1.000	8.258	8.225	.021
	Lower-bound	8.258	1.000	8.258	8.225	.021
Heitto * Heitto1 cov	Sphericity Assumed	7.824	1	7.824	7.793	.024
	Greenhouse-Geisser	7.824	1.000	7.824	7.793	.024
	Huynh-Feldt	7.824	1.000	7.824	7.793	.024
	Lower-bound	7.824	1.000	7.824	7.793	.024
Error(Heitto)	Sphericity Assumed	8.032	8	1.004		
	Greenhouse-Geisser	8.032	8.000	1.004		
	Huynh-Feldt	8.032	8.000	1.004		
	Lower-bound	8.032	8.000	1.004		

Take home message: Koejärjestelyjä suunnitellessa pitää miettiä mitkä kaikki asiat vaikuttavat tutkittavaan kohteeseen, esimerkiksi henkilöiden laihtumiseen. Onko naisten ja miesten alkupainot keskimäärin samat, onko ryhmien välillä eroja liikuntatottumuksissa, onko molempien ryhmien motivaatio samaa tasoa (ovatko miehet varmasti yhtä halukkaita nauttimaan suklaanmakuista laihdutusliitkua kuin naiset?), jne. Toistomittauksissa tulee huomioida mahdollinen RTM-artefakti.