Fysiikan mittausmenetelmät I
syksy 2016
Laskuharjoitus 4

1. Merkitään kaapelin resistanssin ja kuormaksi kytketyn piirin sisäänmenoimpedanssia summana

R = 1000.2 Ω. Jännite R:n yli suhteessa sisäänmenojännitteeseen on tällöin jännitteenjako

$$\left|\frac{u_R}{u_i}\right| = \left|\frac{Z_{R||C}}{Z_{R||C}+Z_L}\right| = \left|\frac{\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{-\frac{j}{\omega C}}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{-\frac{j}{\omega C}}\right)^{-1}+j\omega L}\right| = \left|\frac{1}{1+\frac{Z_L}{Z_{R||C}}}\right|$$

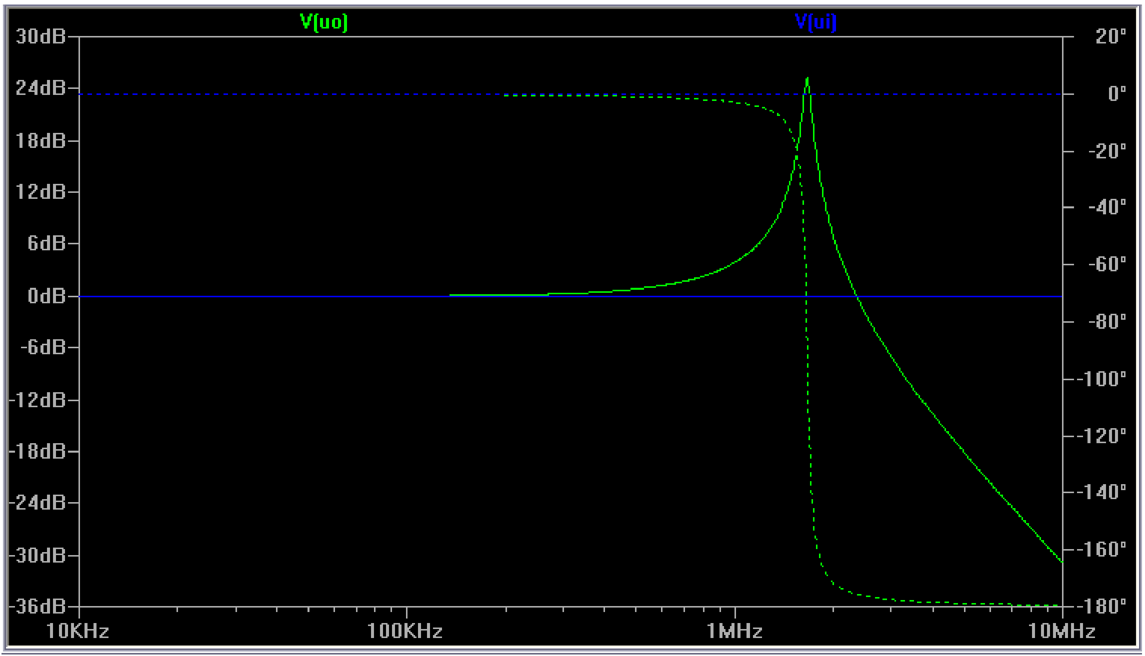
$$= \left|\frac{1}{1+j\omega L(\frac{1}{R}+j\omega C)}\right| = \left|\frac{1}{-LC\omega^2+j\omega\frac{L}{R}+1}\right|$$

ja kysytty ulostulojännite u_o ennen kuormaa on siten

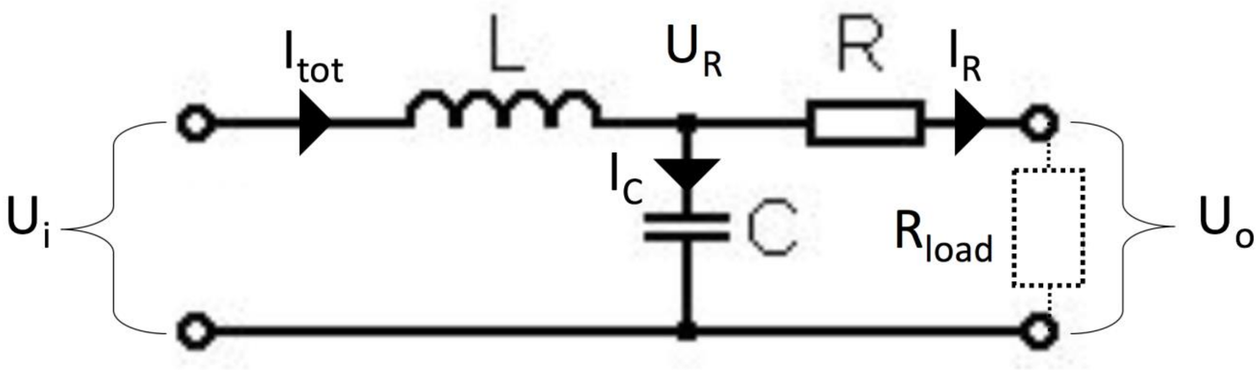
$$\left|\frac{u_o}{u_i}\right| = \left|\frac{u_R}{u_i}\right| \times \frac{1k\Omega}{1k\Omega+0.2\Omega}$$

Kun ratkaistaan u_r:n amplitudi ja määrätään ulostulojännitteen vaimentuneen 1 %:lla, saadaan taajuudeksi $f \approx 2{,}35$ MHz.

SPICE-simulaatio tilanteesta:



Analyyttinen ratkaisu:



$\mathrm{C} = 1760\ \mathrm{pF}, \mathrm{L} = 5.2\ \mu\mathrm{H}, \mathrm{R} = 0.2\ \Omega, \mathrm{R}_{\mathrm{load}} = 1\ \mathrm{k}\Omega$

Jännitteenjakokaavaa $\frac{U_o}{U_i} = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$ voidaan käyttää vain, jos impedanssien Z_1 ja Z_2 läpi kulkeva virta on sama. Merkitään yllä olevassa piirissä kelan läpi kulkevaa virtaa I_{tot}, kondensaattorin C läpi kulkevaa virtaa I_C , ja vastusten R ja R_{load} läpi kulkevaa virtaa I_R. Voimme kirjoittaa ulostulojännitteen ja sisäänmenojännitteen suhteen, kun tunnemme jännitteen pisteessä U_R seuraavasti

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{U_R}{U_i}\frac{R_{load}}{R + R_{load}}$$

Lasketaan ensin $\frac{U_R}{U_i}$. Merkitään sarjaan kytkettyjä vastuksia $R_{tot} = R + R_{load}$. Kondensaattori C on kytketty R_{tot} kanssa rinnan. Rinnankytkennän impedanssi $Z_{R||\mathrm{C}}$ saadaan

$$Z_{R||\mathrm{C}} = \frac{1}{\frac{1}{R_{tot}} + \frac{1}{Z_C}} = \frac{1}{\frac{1}{R_{tot}} + j\omega C}$$

Impedanssin Z_L läpi kulkeva virta on nyt sama kuin $Z_{R||\mathrm{C}}$ läpi kulkeva virta (Kirchoff 1. laki, $I_{tot} = I_R + I_C$). Voidaan käyttää jännitteenjakoa

$$\frac{U_R}{U_i} = \frac{Z_{R||\mathrm{C}}}{Z_L + Z_{R||\mathrm{C}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_{tot}} + j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R_{tot}} + j\omega C}}$$

$$= \frac{1}{j\omega L * \left(\frac{1}{R_{tot}} + j\omega C\right) + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{j\omega L}{R_{tot}} - \omega^2 LC + 1}$$

Tehtävässä ei tarvita vaihekulmia, joten osamäärän reaali- ja imaginääriosia ei tarvitse erotella nimittäjän kompleksikonjugaatilla. Voidaan ottaa itseisarvo suoraan

$$\left|\frac{U_R}{U_i}\right| = \left|\frac{1}{\frac{j\omega L}{R_{tot}} - \omega^2 LC + 1}\right|$$

$$= \frac{|1|}{\left|\frac{j\omega L}{R_{tot}} - \omega^2 LC + 1\right|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R_{tot}}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R_{tot}}\right)^2}}$$

Ulostulosignaalin amplitudi on sisäänmeno- ja ulostulojännitteiden suhteen itseisarvo. Saadaan

$$\left|\frac{U_o}{U_i}\right| = \left|\frac{U_R}{U_i}\right| \frac{R_{load}}{R + R_{load}}$$

Selvitetään kulmataajuuden raja-arvo, jolla signaali vaimenee prosentin eli $\left|\frac{U_o}{U_i}\right| = 0.99$

$$0.99 = \left|\frac{U_R}{U_i}\right| \frac{R_{load}}{R + R_{load}}$$

$$0.99 = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R_{tot}}\right)^2}} \frac{R_{load}}{R + R_{load}}$$

$$0.99^2 = \frac{1}{(1-\omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R_{tot}}\right)^2}\left(\frac{R_{load}}{R + R_{load}}\right)^2$$

$$0.99^2\left[(1-\omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R_{tot}}\right)^2\right] = \left(\frac{R_{load}}{R + R_{load}}\right)^2$$

$$0.99^2\left[\omega^4 L^2 C^2 - 2\omega^2 LC + 1 + \omega^2 \frac{L^2}{R_{tot}^2}\right] = \left(\frac{R_{load}}{R + R_{load}}\right)^2$$

$$\omega^4 * 0.99^2 L^2 C^2 + \omega^2 * 0.99^2\left(\frac{L^2}{R_{tot}^2} - 2LC\right) + \left(0.99^2 - \left(\frac{R_{load}}{R + R_{load}}\right)^2\right) = 0$$

Tehdään muuttujanvaihto $x^2 = \omega^4$ jolloin voidaan käyttää toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Saadaan ratkaisut

$$x = \begin{cases} -1.08321 * 10^{12}\,\frac{1}{s^2} \\ 2.19292 * 10^{14}\,\frac{1}{s^2} \end{cases}$$

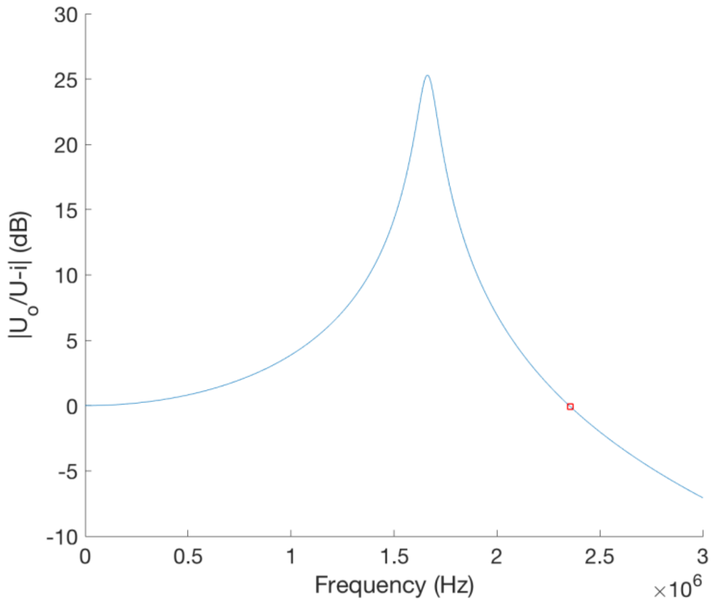
Taajuus ei selvästikään voi olla kompleksinen (negatiivinen neliö), joten yhtälöllä on vain yksi fysikaalinen ratkaisu. Kulmataajuus saadaan huomioimalla aiempi muuttujanvaihto

$$\omega = \sqrt{x} = \sqrt{2.19292 * 10^{14}\,\frac{1}{s^2}} = 1.48085 * 10^7\ \mathrm{Hz}$$

Taajuus

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1.48085 * 10^7 \text{ Hz}}{2\pi} = 2.35685 * 10^6 \text{ Hz}$$

$$f \approx 2.36 \text{ MHz}$$



2. a) Olkoon lähtöimpedanssi R ja kuormaresistanssi R_L. Kun ulostulojen välille ei ole kytketty mitään on tilanne ekvivalentti sen kanssa että niiden välissä olisi äärettömän resistanssin vastus, ja vahvistimen "lähtöjännite" kokonaan ulostulojen napojen yli. Kun vahvistimeen kytkee kuorman, jonka resistanssi on äärellinen, jakautuu tämä "lähtöjännite" yli sarjaan kytkettyjen vastusten:

$$\frac{R_L}{R + R_L} = 0.8$$

josta lyhyen laskun jälkeen saadaan

$$R = R_L/4$$

eli ulostuloimpedanssi R = 250 Ω.

b) Tehovahvistus on suhde sisäänmenevän ja ulostulevan tehon välillä. Sisäämenevä teho on

$$P_I = \frac{U^2}{R_I}$$

jossa U on sisäänmenevän signaalin jännite ja R_I piirin tuloimpedanssi 20 kΩ. Jännite vahvistuu 60 dB eli 1000-kertaiseksi, mutta tämä vahvistunut jännite jakautuu kuormavastuksen R_L ja ulostuloimpedanssin välille. Molemmat ovat yhtä suuria, joten vain puolet jännitehäviöstä tapahtuu kuormassa. Lopullinen jännitevahvistus on siis 500. Ulostulevalle teholle

$$P_O = \frac{(500U)^2}{R_L}$$

Nyt lasketaan ulostulevan ja sisäänmenevän tehon suhde desibeleissä:

$$A_P = 10log_{10}\left(\frac{P_O}{P_I}\right)$$

josta pienen laskun jälkeen kun U:t supistuvat pois saadaan A_P = 67 dB.

c) Nousunopeus (V/s) riittää taajuuksilla, joilla

$$\frac{d[A_V \sin(\omega t)]}{dt} = A_V \omega \cos(\omega t) \leq 0{,}5\ V/\mu s$$

Jännitteen aikaderivaatta on maksimissaan kun kosini on 1 →

$$A_V \omega \leq 0{,}5\ V/\mu s$$

joten suurin vääristymätön taajuus saadaan kun

$A_V \omega = 0{,}5\ V/\mu s$, $\omega = \frac{0{,}5\ V/\mu s}{A_V}$, $f = \frac{\omega}{2\pi}$

$$f = \frac{0{,}5\ V/\mu s}{A_V \cdot 2\pi} \approx 15{,}9\ kHz$$

3. a) Ohmin laki antaa suoraan R = U/I = 5 V / 34µA = 147 kΩ.

b) Suuri, 147 kΩ on melko paljon verrattuna yleensä käytettyihin resistanssiarvoihin. Tästä syystä piiri ei ole kovin käytännöllinen; estääkseen ulostulojännitteen muuttumisen tulisi jokaisella piirillä olla paljon pienempi lähtöimpedanssi kun sitä seuraavan piirin tuloimpedanssi. Jos jännitettä u_o mittaa esim. yleismittarilla, jonka tuloimpedanssi on tyypillisesti megaohmien luokka, kytkeytyy se rinnan R:n kanssa, ja vaikuttaa piirin ulostulojännitteeseen. Jos valitaan pienempi R:n arvo, lähtöimpedanssi pienenee mutta 5 V:n signaalia ei saavuteta ilman vahvistusta.

c) Tehollisarvo lämpökohinalle vastuksessa on $U_T = \sqrt{(4k_BTR\Delta f)}$. Δf on taajuuden kaistanleveys, tässä tapauksessa 9990 Hz. Lukuarvojen asetus antaa $U_T = 4.884$ µV. Raekohinavirta on $I_S = \sqrt{(2qI\Delta f)}$, jossa q on elektronin alkeisvaraus $1.602 \cdot 10^{-19}$ C. Ohmin lain kautta saadaan vastaava kohinajännite: $U_S = R\sqrt{(2qI\Delta f)} = 39.885$ µV.

Koska kohinatyypit ovat toisistaan riippumattomia, kokonaiskohinan tehollisarvon saa summaamalla kohinoiden tehollisarvot neliöllisesti:

$U_N = \sqrt{(U_S^2 + U_T^2)} = 40.183$ µV.

Itse jännitesignaalin tehollisarvon saa virran tehollisarvosta Ohmin lain kautta, jolloin

U = 3.381 V.

SNR on tällöin $20\log_{10}(3.381\text{V}/40.183\mu\text{V})$ dB = 99 dB.

4. Kuvasta lukemalla:

a) 3dB -pisteet (amplitudi pudonnut 3dB päästökaistalta) 10 kHz ja 12 kHz.
c) Taajuuskaista on tämän perusteella 12 kHz - 10 kHz = 2 kHz.
b) Vaimennuksen jyrkkyys laskettuna korkean taajuuden puolelta: 12 kHz -> 13,5 kHz; 0 dB - > -65 dB, josta saadaan n. 43 dB / kHz. Jyrkkyys ilmoitetaan yleensä joko dekadia tai oktaavia (eli taajuuden kaksinkertaistumista) kohden.
d) Vasteen tasaisuus on kuvan perusteella n. ±1 dB.
Elliptinen suodin on vasteen tasaisuuteen eli rippelijännitteeseen nähden jyrkin kaikista suodinmitoituksista.

5. a) 200 Hz näytteistystaajuudella Nyquistin taajuus on 100 Hz ja 180 Hz:lla taas 90 Hz. Mitatut taajuuden muutokset johtuvat rajataajuuden ylittävän signaalin laskostumisesta (aliasing).

b) Laskostuneille signaaleille $| f – f_N | = | f_N – f_A |$, missä f on signaalin todellinen taajuus, f_N Nyquistin taajuus ja f_A mitattu laskostunut signaali. Ensimmäisen mittauksen perusteella $| f_N – f_A | = 20$ Hz, joten f:n täytyy olla 20 Hz suurempi kuin f_N, eli 120 Hz. Toisessa mittauksessa $| f_N – f_A | = 30$ Hz ja samoin perustein signaalin taajuus on oikeasti 30 Hz suurempi kuin 90 Hz eli 120 Hz.

c) Mittaustulos on liipaisutasosta riippuva DC-vakiojännite, jos näytteistystaajuus on sama kuin signaalin taajuus eli 120 Hz.