Analogiasuunnittelu 2010

Harjoitus 2, Esimerkkiratkaisut

1.

Integraattorimallissa $A(V_+ - V_-) = V_o$. Kääntävän kytkennän yhteydessä sisääntulo $V_+ = 0$ V, jolloin saadaan: $V_- = -\frac{u_0}{A}$. Vahvistuskertoimen voidaan approksimoida olevan: $A(s) \approx \frac{\omega_t}{s}$. Lisäksi Kirchhoffin virtalain mukaan voidaan kirjoittaa: $i_{R_1} + i_{R_2} = 0\ A = \frac{U_i - V_-}{R_1} + \frac{U_o - V_-}{R_2}$, joka voidaan kirjoittaa integraattorimallin avulla:

$$R_2\left(U_i + \frac{U_o}{A}\right) = -R_1\left(U_o + \frac{U_o}{A}\right)$$

Ja edelleen muotoon:

$$\frac{U_i}{U_o} + \frac{1}{A} = -\frac{R_1}{R_2}\left(1 + \frac{1}{A}\right)$$

$$\frac{U_i}{U_o} = -\frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{A}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

Josta siirtofunktioksi saadaan:

$$T(s) = \frac{U_o}{U_i} = \frac{1}{-\frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{A}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + \frac{1}{A}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Kirjoittamalla: $K_P = 1 + \frac{R_2}{R_1}$, ja $K_n = \frac{R_2}{R_1}$ saadaan:

$$T(s) = -K_n\frac{1}{1 + \frac{K_P}{A(s)}} = -K_n\frac{1}{1 + K_p\frac{s}{\omega_t}} \xrightarrow{s \to j\omega} -K_n\frac{1}{1 + K_p\frac{j\omega}{\omega_t}}$$

Amplitudivaste saadaan siirtofunktion itseisarvosta:

$$|T(j\omega)| = |-K_n|\frac{1}{\left|1 + K_P\frac{j\omega}{\omega_t}\right|} = K_n\frac{1}{\sqrt{1 + K_P^2\frac{\omega^2}{\omega_t^2}}}$$

Vaihevaste saadaan imaginääri- ja reaaliosan suhteesta:

$$T(j\omega) = -K_n\frac{1}{1 + K_p\frac{j\omega}{\omega_t}} = -K_n\frac{1 - K_p\frac{j\omega}{\omega_t}}{1 + (K_p\frac{j\omega}{\omega_t})^2}$$

$$Re[T(j\omega)] = -K_n\frac{1}{1 + (K_p\frac{j\omega}{\omega_t})^2}$$

$$Im[T(j\omega)] = K_n \frac{K_p \frac{j\omega}{\omega_t}}{1 + (K_p \frac{j\omega}{\omega_t})^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{Im[T(j\omega)]}{Re[T(j\omega)]} = \arctan \left(\frac{K_n K_p \frac{j\omega}{\omega_t}}{K_n} \right) = \arctan \left(K_p \frac{j\omega}{\omega_t} \right)$$

2.

Lasketaan käyttäen admittanssiarvoja, jolloin: $G_1 = \frac{1}{R_1}$, $G_2 = \frac{1}{R_2}$, ja olkoon $Y_1 = G_1 + C_1 s$, ja $Y_2 = G_2 + C_2 s$.

1. tehtävässä johdettu kääntävän operaatiovahvistimen siirtofunktio voidaan johtaa vastaavasti tilanteelle, jossa komponenteilla on resistanssin lisäksi myös impedanssia, $R_1 \rightarrow Z_1$ ja $R_2 \rightarrow Z_2$:

$$T(S) = -\frac{z_2}{z_1} \frac{1}{1 + \frac{1}{A(s)} \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right)} \approx -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{Y_1}{Y_2}$$

$$T(S) = -\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{G_1 + C_1 s}{G_2 + C_2 s} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{s + \frac{G_1}{C_1}}{s + \frac{G_2}{C_2}} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}}$$

Tästä nähdään että siirtofunktion nollakohta sijaitsee kohdassa: $z = -\frac{1}{R_1 C_1}$ ja napa kohdassa $p = -\frac{1}{R_2 C_2}$. Sijoittamalla lukuarvot saadaan: z = -100 kRad/s ja p = -10 kRad/s. Koska napa on lähempänä origoa kuin nollakohta, p > z, niin kyseessä on alipäästösuodin.

Kytkennän navan ja nollakohdan voi asettaa helposti haluamakseen valitsemalla sopivat vastukset ja kondensaattorit, ja piirin saa myös toimimaan ylipäästösuotimena, kun p < z. Siirtofunktiosta nähdään myös että napa on aina negatiivisessa puoliavaruudessa. Kytkennän vahvistus määräytyy kondensaattorien suhteesta, mikä voi aiheuttaa käytännön ongelmia, koska kondensaattorien kapasitanssit voivat vaihdella pahimmillaan useita kymmeniä prosentteja nimellisarvosta.

3.

Jännitteenjaosta saadaan:

$$T(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2 + sL_2}{R_1 + sL_1 + R_2 + sL_2} = \frac{L_2(\frac{R_2}{L_2} + s)}{(R_1 + R_2) + s(L_1 + L_2)} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{\frac{R_2}{L_2} + s}{\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} + s}$$

Tästä nähdään, että siirtofunktion napa sijaitsee kohdassa $s = -\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} = -\frac{2}{11} M \frac{Rad}{s}$, ja nollakohta $s = -\frac{R_2}{L_2} = -1M \frac{Rad}{s}$. Eli napa sijaitsee lähempänä origoa, jolloin kyseessä on alipäästösuodin.

Amplitudivasteeksi saadaan:

$$|T(s)| = \left|\frac{L_2}{L_1 + L_2}\right| \frac{\left|\frac{R_2}{L_2} + s\right|}{\left|\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} + s\right|} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{\sqrt{\left(\frac{R_2}{L_2}\right)^2 + s^2}}{\sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}\right)^2 + s^2}} \xrightarrow{s \to j\omega} \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{\sqrt{\left(\frac{R_2}{L_2}\right)^2 - \omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}\right)^2 - \omega^2}}$$

Ja vaihevasteeksi:

$$\varphi = \arctan \frac{Im[T(j\omega)]}{Re[T(j\omega)]}$$

Imaginääri- ja reaaliosan erottaminen onnistuu helpoiten muodosta:

$$T(s) = \frac{R_2 + sL_2}{(R_1 + R_2) + s(L_1 + L_2)} \xrightarrow{s \to j\omega} \frac{R_2 + j\omega L_2}{(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2)}$$

$$T(j\omega) = \frac{(R_2 + j\omega L_2)((R_1 + R_2) - j\omega(L_1 + L_2))}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2(L_1 + L_2)^2} =$$

$$\frac{R_1 R_2^2 + R_2^2 + L_2\omega^2(L_1 + L_2) - jR_2\omega(L_1 + L_2) + jL_2\omega(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2(L_1 + L_2)^2}$$

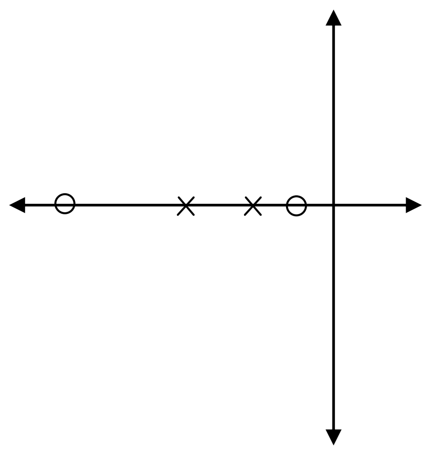
$$\varphi = \arctan\left(\frac{-R_2\omega(L_1 + L_2) + L_2\omega(R_1 + R_2)}{R_1 R_2^2 + R_2^2 + L_2\omega^2(L_1 + L_2)}\right)$$

4.

Annetut navat: $p_1 = 10^4 \frac{Rad}{s}, p_2 = 10^5 \frac{Rad}{s}$

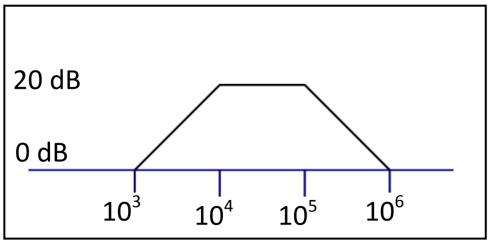
Annetut nollakohdat: $z_1 = 10^3 \frac{Rad}{s}, z_2 = 10^6 \frac{Rad}{s}$

Piirtämällä navat ja nollakohdat s-avaruuteen saadaan kuvaajaksi:



Annetun siirtofunktion voidaan ajatella koostuvan kahdesta peräkkäin liitetystä suodinpiiristä, joista toinen on alipäästösuodin ja toinen ylipäästösuodin, joista kumpikin on 1.kertalukua. Lisäksi suotimien vahvistuskertoimien tulo on 1.

Asymptoottinen Boden kuvaajaksi saadaan:



Nollakohta $z_1 = -10^3$, kääntää siis vasteen nousevaksi, jyrkkyydellä -20 dB/dekadi. Seuraavaksi napa $p_1 = -10^4$ tasoittaa vasteen, jonka jälkeen toinen nollakohta $z_2 = -10^5$ muuntaa vasteen laskevaksi, ja viimeinen napa $p_2 = -10^6$ tasoittaa vasteen taas 0 dB. Kyseessä on kaistapäästösuodin, joka vahvistaa taajuuksia $s = -10^3$ — 10^6 Rad/s. Tässä navat siis määräävät suotimen -3dB pisteet.

Suodin voidaan toteuttaa esimerkiksi kahdella tehtävän 2. mukaisella kytkennällä. Annettu siirtofunktio voidaan siis kirjoittaa muodossa: $T(S) = \frac{s+z_1}{s+p_1}\frac{s+z_2}{s+p_2} = \frac{C_1}{C_2}\frac{C_3}{C_4}\frac{s+\frac{1}{R_1C_1}}{s+\frac{1}{R_2C_2}}\frac{s+\frac{1}{R_3C_3}}{s+\frac{1}{R_4C_4}}$

Tässä komponentit R_1, R_2, C_1 ja C_2 muodostavat ensimmäisen suotimen, ja komponentit R_3, R_4, C_3 ja C_4 muodostavat toisen suotimen. Jotta navat ja nollakohdat saataisiin oikeisiin paikkoihin, ja vahvistukseksi 0db, valitaan $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1nF$. Tällöin vahvistus on selvästi $\frac{C_1}{C_2}\frac{C_3}{C_4} = 1$.

1. Nollakohdasta saadaan: $\frac{1}{R_1C_1} = z_1 \rightarrow R_1 = \frac{1}{z_1C_1} = 10M\Omega$

Vastaavasti saadaan: $R_2 = 100k\Omega$, $R_3 = 1k\Omega$, $R_4 = 10k\Omega$.

Suodin voidaan toteuttaa myös muilla piireillä, joilla on myös mahdollista saada vakaampi vahvistus. Kuten tehtävän 2. ratkaisun lopussa todetaan kondensaattoreista riippuva vahvistus voi reaalikomponenteilla olla vaikeasti hallittavissa.