# Harjoitus 1

Malliratkaisut

## Tehtävä 1

$$f(t) = e^{-(t-\alpha)}\cos(\omega_0 t + \beta)$$

$$L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st-t+\alpha}\cos(\omega_0 t + \beta)dt$$

$$\cos(\omega_0 t + \beta) = \frac{1}{2}(e^{j(\omega_0 t+\beta)} + e^{-j(\omega_0 t+\beta)})$$

$$L[f(t)] = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st-t+\alpha}(e^{j(\omega_0 t+\beta)} + e^{-j(\omega_0 t+\beta)})$$

$$= \frac{e^\alpha}{2}\int_0^\infty (e^{t(j\omega_0-s-1)+j\beta} + e^{-t(j\omega_0+s+1)-j\beta})dt$$

$$= \frac{e^\alpha}{2}|_0^\infty(\frac{1}{j\omega_0-s-1}e^{t(j\omega_0-s-1)+j\beta} - \frac{1}{-j\omega_0-s-1}e^{-t(j\omega_0+s+1)-j\beta})$$

$$= \frac{e^\alpha}{2}(0 - 0 - \frac{1}{j\omega_0-s-1}e^{j\beta} + \frac{1}{-j\omega_0-s-1}e^{-j\beta})$$

$$\frac{e^\alpha}{2}(\frac{1}{-j\omega_0+s+1}e^{j\beta} + \frac{1}{-j\omega_0-s-1}e^{-j\beta})$$

$$= \frac{e^\alpha}{2((s+1)^2-w_0^2)}((s+1-j\omega_0)e^{j\beta} + (s+1+j\omega_0)e^{-j\beta})$$

$$= \frac{e^\alpha}{2((s+1)^2-w_0^2)}((s+1)(e^{j\beta}+e^{-j\beta}) + j\omega_0(e^{j\beta}-e^{-j\beta}))$$

$$\frac{e^\alpha}{(s+1)^2-w_0^2}((s+1)\cos(\beta) + \omega_0\sin(\beta))$$

## Tehtävä 2

$$F(s) = \frac{s^2 + 9}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

Lasketaan napojen paikat:

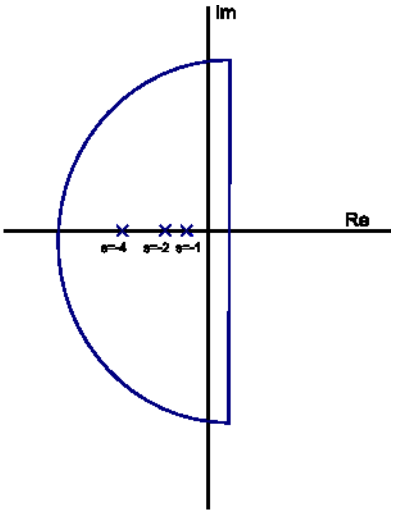
$$s^3 + 7s^2 + 14s + 8 = 0 \Rightarrow s = -1; s = -2; s = -4$$

$$F(s) = \frac{s^2 + 9}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

Lasketaan käänteismuunnos:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{-j\infty+\sigma}^{j\infty+\sigma} F(s)e^{st}ds$$

Muuttuja $\sigma$ tulee valita siten että kaikki navat jäävät polun oikealle puolelle, eli $\sigma > -1 > -2 > -4$. Integraalin laskeminen on helpointa käyttäen residyjä. Luodaan apuintegraalikäyrä $\gamma$, joka koostuu edellisestä osasta ja kaaresta negatiiviselle puoliavaruudelle.




Jordanin lemman mukaan kaaren osuus integraalista katoaa äärettömyydessä, jos funktio suppenee tasaisesti kohti nollaa äärettömyydessä. Näin ollen käänteismuunnoksesta tulee:

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{-\infty+j\sigma}^{\infty+j\sigma} \frac{s^2 + 9}{(s+1)(s+2)(s+4)} e^{st}ds = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\gamma} \frac{s^2 + 9}{(s+1)(s+2)(s+4)} e^{st}.$$

Funktiolle, jolla on vain ensimmäisen asteen napoja, residyarvo pisteessä $z$ voidaan laskea $Res(g(x), z) = \frac{\Psi(x)}{\Phi'(x)}|_{x=z}$, kun funktio $g(x)$ jaetaan muotoon

$g(x) = \frac{\Psi(x)}{\Phi(x)}$. Rationaalifunktion apufunktiot $\Phi$ja $\Psi$voi valita vapaasti, kunhan pisteen $z$ ei-analyyttinen osa sijaitsee funktiossa$\Phi$.Näin ollen nimittäjää derivoidessa, voidaan derivoida ainoastaan tulomuodon ei-analyyttistä osaa.

Lisäksi Residylause sanoo, että suljetun käyrän, tässä tapauksessa käyrän $\gamma$, integraali on sama kuin käyrän sisään jäävien residyjen summa kerrottuna $2j\pi$:llä, kun käyrä kierretään vastapäivään. Eli edellinen integraali saadaan muotoon:

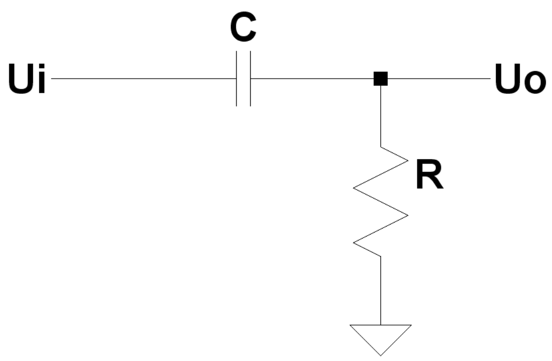
$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \oint_\gamma \frac{s^2+9}{(s+1)(s+2)(s+4)} e^{st}$$

$$= \frac{1}{2j\pi} 2j\pi \left( \frac{(s^2+9)e^{st}}{(s+2)(s+4)}|_{s=-1} + \frac{(s^2+9)e^{st}}{(s+1)(s+4)}|_{s=-2} + \frac{(s^2+9)e^{st}}{(s+1)(s+2)}|_{s=-4} \right)$$

$$= \frac{10}{1 \cdot 3} e^{-t} + \frac{13}{-1 \cdot 2} e^{-2t} + \frac{25}{-3 \cdot (-2)} e^{-4t} = \frac{10}{3} e^{-t} - \frac{13}{2} e^{-2t} + \frac{25}{6} e^{-4t}.$$

Samaan tulokseen päästään jos funktio $F(s)$ hajoitetaan osamurtoihin, jolloin saadaan: $f(t) = \frac{1}{2j\pi} \oint_\gamma \left( \frac{10}{3(s+1)} - \frac{13}{2(s+2)} + \frac{25}{6(s+4)} \right) e^{st}$.

## Tehtävä 3.




Jännitteenjaon perusteella siirtofunktioksi saadaan:

$$H(s) = \frac{u_0}{u_i} = \frac{z_2}{z_1 - z_2} = \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}}.$$

Amplitudivaste on siirtofunktion itseisarvo:

$$|\frac{u_0}{u_i}| = |\frac{R}{R + \frac{1}{Cs}}| \; |_{s \to j\omega} = \frac{|R|}{|R + \frac{1}{j\omega C}|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{\omega RC})^2}}.$$

Vaihevaste saadaan kompleksivektorin kulmasta:

$$\phi = \arctan(\frac{\Im[\frac{u_0}{u_i}]}{\Re[\frac{u_0}{u_i}]}).$$

Reali- ja imaginääriosa on helpointa laskea kompleksikonjugaatin avulla:

$$\frac{u_0}{u_i} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R(R - \frac{1}{j\omega C})}{(R + \frac{1}{j\omega C})(R - \frac{1}{j\omega C})} = \frac{R^2 - \frac{R}{j\omega C}}{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}.$$

Tästä saadaan reaali- ja imaginääriosaksi:

$$\Re[\frac{u_0}{u_i}] = \frac{R^2}{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}, \ \Im[\frac{u_0}{u_i}] = \frac{\frac{R}{\omega C}}{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2},$$

ja näiden suhteeksi:

$$\frac{\Im[\frac{u_0}{u_i}]}{\Re[\frac{u_0}{u_i}]} = \frac{\frac{R}{\omega C}}{R^2} = \frac{1}{\omega RC}.$$

Joten vaihevaste on

$$\phi = \arctan(\frac{1}{\omega RC}).$$

-3dB piste jännitteelle tarkoittaa pistettä, jossa amplitudivaste on päästökaistaan nähden:

$$10^{\frac{-3}{20}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$|\frac{u_0}{u_i}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{\omega RC})^2}} = 10^{\frac{-3}{20}}$$

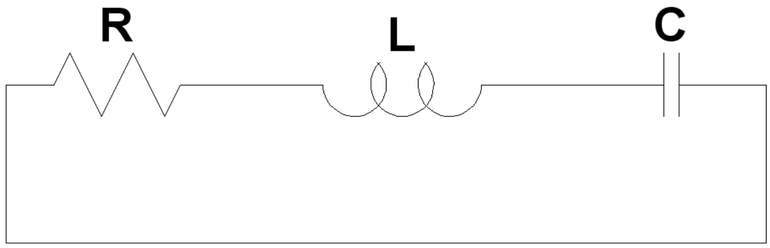
$$\frac{1}{1 + (\frac{1}{\omega RC})^2} = 10^{\frac{-6}{20}} \Rightarrow (\frac{1}{\omega RC})^2 = 10^{\frac{6}{20}} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega RC} = \sqrt{10^{\frac{6}{20}} - 1} \Rightarrow \omega = \frac{1}{RC\sqrt{10^{\frac{6}{20}} - 1}} \approx \frac{1}{RC} \ ,$$

koska $\sqrt{10^{\frac{6}{20}} - 1} \approx 1$.

Siirtofunktion nollakohdat ovat osoittajan nollakohtia: $R = 0$. Tässä resistanssi ei riipu kompleksitaajuudesta $s$, joten siirtofunktiolla ei ole nollakohtia s-avaruudessa. Siirtofunktion napa sijaitsee nimittäjän nollakohdassa:$R + \frac{1}{Cs} = 0 \ \Rightarrow s = -\frac{1}{RC}$. Tästä huomataan, että siirtofunktion napa sijaitsee juuri amplitudivasteen -3dB pisteessä.

## Tehtävä 4.




$R = 1\ k\Omega$, $L = 1\ mH$, $C = 1nF$

Kirchoffin jänniteyhtälöistä saadaan:

$$V_L + V_c + V_r = 0V.$$

Jännite vastuksen yli saadaa Ohmin-laista: $V_r = Ri(t)$. Jännite kelan yli $V_L = L\frac{di(t)}{dt}$.

Kondensaattorille on voimassa:

$$V_C = \frac{Q}{C} = \frac{\int_0^t i(\tau)d\tau + Q_0}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau.$$

Kondensaattorin alkuvaraus olkoon $Q_0$ ja jännite kondensaattorin yli alkutilassa on tällöin $V_0 = \frac{Q_0}{C}$.

Nyt saadaan jännitteelle:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + V_0 = 0.$$

Laplace-muuntamalla saadaan

$$RI(s) + L(sI(s) - I(0)) + \frac{I(s)}{Cs} = 0,$$

missä virta on alussa nolla: $I(0) = 0$.

Tästä voidaan helposti ratkaista virta s-avaruudessa:

$$I(s) = \frac{-V_0}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{c}} = \frac{-\frac{V_0}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{Lc}}.$$

Käänteismuuntamalla $I(s)$ saadaan virran yhtälö aika-avaruudessa. Helpointa on hajoittaa $I(s)$ tulomuotoon ja osamurtoihin. Tulomuodosta saadaan:

$$I(s) = \frac{-\frac{V_0}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{Lc}} = \frac{-\frac{V_0}{L}}{(s-a_1)(s-a_2)},$$

missä $a_1$ja $a_2$on nimittäjän nollakohdat:

$$a_1 = \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{(\frac{R}{L})^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

ja

$$a_2 = \frac{-\frac{R}{L} - \sqrt{(\frac{R}{L})^2 - \frac{4}{LC}}}{2}.$$

Osamurtohajoitelmaksi saadaan:

$$I(s) = \frac{-\frac{V_0}{L}}{(s-a_1)(s-a_2)} = -\frac{V_0}{L}(\frac{A}{s-a_1} + \frac{B}{s-a_2})$$

$$= -\frac{V_0}{L}(\frac{A(s-a_2)+(s-a_1)B}{(s-a_1)(s-a_2)}) = -\frac{V_0}{L}(\frac{As+Bs-Aa_2-Ba_1}{(s-a_1)(s-a_2)}).$$

Tästä saadaan kaksi yhtälöä, joista kertoimet $A$ ja $B$ voidaan ratkaista. Koska $As + Bs = 0$ ja $-Aa_2 - Ba_1 = 1$, saadaan:$A = -B = \frac{1}{a_1-a_2}$.

Nyt virraksi saadaan:

$$I(s) = -\frac{V_0}{L}(\frac{\frac{1}{a_1-a_2}}{s-a_1} - \frac{\frac{1}{a_1-a_2}}{s-a_2}) = -\frac{V_0}{L(a_1-a_2)}(\frac{1}{s-a_1} - \frac{1}{s-a_2}).$$

Huomataan että tässä voidaan käyttää eksponentti-funktion muunnoskaavaa, ja käänteismuunnokseksi saadaan:

$$i(t) = L^{-1}[I(s)] = -\frac{V_0}{L(a_1-a_2)}(e^{ta_1} - e^{ta_2}).$$

Kirjoitetaan: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, ja$\alpha = \frac{R}{2L}$. Ja nyt voidaan kirjoittaa

$$a_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{2\sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}}{2} = -\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha + j\omega$$

ja

$$a_2 = -\alpha - j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha - j\omega,$$

missä

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Lisäksi voidaan laskea:

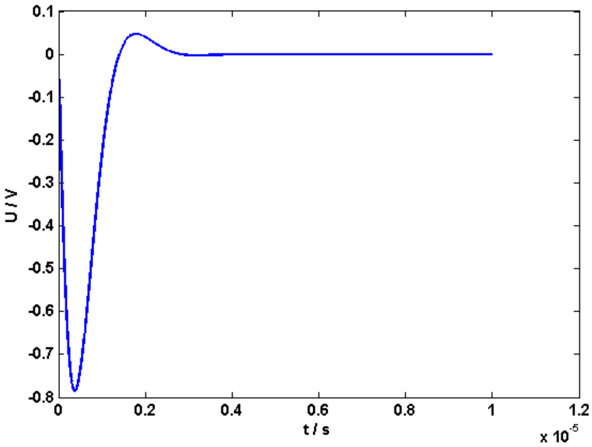
$$a_1 - a_2 = -\alpha + j\omega + \alpha + j\omega = 2j\omega.$$

Ja virta voidaan kirjoittaa muotoon:

$$i(t) = \frac{-V_0}{L(a_1-a_2)}(e^{t(-\alpha+j\omega)} - e^{t(-\alpha-j\omega)}) = \frac{-V_0}{2jL\omega}e^{-\alpha t}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \frac{-V_0}{L\omega}e^{-\alpha t}\sin(\omega t).$$

Kun tunnetaan virta voidaan jännite vastuksen yli kirjoittaa Ohmin-lain mukaan (ks. kuva):

$$V_R = Ri(t) = -\frac{R}{L}\frac{V_0}{\omega}e^{-\alpha t}\sin(j\omega t).$$




## Bonus

Konvoluutio määritellään:

$$(f \ * \ g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Tämän laplacen muunnos on:

$$\mathcal{L}\left[(f \ * \ g)(t)\right](s) = \int_0^\infty dt \exp(-st) \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Integrointialue voidaan ajatella $(t, \tau)$ -tasoksi, jossa integrointi aluetta rajoittaa positiivinen $t$-akseli ja suora $\tau = t$. Konvoluution Laplacen muunnos integroi tätä aluetta ensin $\tau = 0..t$ ja sitten $t = 0..\backslash\text{inf}$. Sama integrointi alue voidaan kattaa myös integroimalla ensin $t = \tau..\inf$ ja sitten $\tau = 0..\inf$, jolloin saadaan:

$$\mathcal{L}\left[(f \ * \ g)(t)\right](s) = \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty f(\tau)g(t-\tau)\exp(-st)dt$$

Tehdään muuttujanvaihto $t' = t - \tau$, ja kirjoitetaan edellinen yhtälö uudessa muodossa:

$$\mathcal{L}\left[(f \ * \ g)(t)\right](s) = \int\limits_0^\infty f(\tau)d\tau \int\limits_0^\infty g(t')\exp(-s(t'+\tau))dt =$$

$$\int\limits_0^\infty f(\tau)\exp(-s\tau)d\tau \int\limits_0^\infty g(t')\exp(-st')dt = \mathcal{L}\left[f\right](s)\mathcal{L}\left[g\right](s) = F(s)G(s)$$