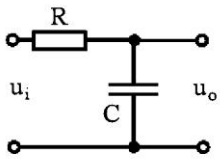
Fysiikan mittausmenetelmät I
syksy 2016
Malliratkaisut 5

1. Yksinkertaisin alipäästösuodatin on RC-piiri, jossa ulostulo otetaan kondensaattorin yli:



Jännitteenjaosta seuraa

$$\frac{|u_o|}{|u_i|} = \frac{\left|\frac{-j}{\omega C}\right|}{\left|R - \frac{j}{\omega C}\right|} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Teemme sovituksen niin että 2 MHz kohina vaimenee juuri vaaditun määrän (silloin haluttu 40 kHz signaali vaimenee vähiten). 20 dB vastaa vaimenemista kertoimella 10, joten $|u_o|/|u_i| = 1/10$. Valitsemme mielivaltaisesti vaikka C = 0.1 µF. Tällöin saamme vastukseksi

$$R = \frac{\sqrt{99}}{\omega C}$$

Jolloin R = 7.9 Ω. Tarkistamme vielä ettei 40 kHz signaali vaimene enemmän kuin sallittua. Asetamme arvomme jännitteenjaon yhtälöön, jolloin näemme että 40 kHz:lla signaali vaimenee vain noin 2%, joten suodatin toimii näillä arvoilla. Jyrkemmän vaimennuksen saisi lisäämällä suodatusasteita. Näille yleisiä mitoutusmalleja ovat esimerkiksi Butterworth, Chebyshev ja Bessel.

2. Kääntävä vahvistin:

Koska sisäänmenoihin ei ideaalimallin mukaan mene virtaa

$$i_f = i_{in}$$

Negatiivisesta takaisinkytkennästä johtuen kääntävä sisäänmeno on virtuaalisessa maatasossa eli

$$u_- = u_+ = 0$$

Tämän perusteella:

$$i_{in} = \frac{u_{in} - u_-}{R_{in}} = \frac{u_{in}}{R_{in}}$$

Ja ulostulojännite:

$$u_{out} = u_- - R_f i_f = -u_{in}\frac{R_f}{R_{in}}$$

Ei-kääntävä vahvistin:

Jännitteenjaon perusteella:

$$u_{in} = u_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2}u_{out}$$

Eli ulostulojännite:

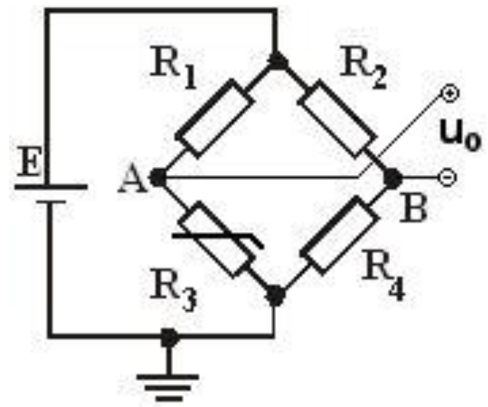
$$u_{out} = (1 + \frac{R_2}{R_1})u_{in}$$

b) Kääntävän vahvistimen sisäänmenoimpedanssi on R_{in} ja ei-kääntävän vahvistimen sisäänmenoimpedanssi on operaatiovahvistimen oma sisäänmenoimpedanssi (ellei terminointivastusta lisätä sisäänmenoon).

c) Operaatiovahvistimissa tavoiteltuja ominaisuuksia ovat esimerkiksi:
- Suuri jännitevahvistus
- Suuri taajuuskaista
- Suuri nousunopeus
- Pieni kohina ja särö
- Pienet offset-jännitteet
- Pieni lämpötilariippuvuus
- Laaja ja/tai yksipuolinen käyttöjännite
- Pieni tehonkulutus
- Suuri sisäänmenoimpedanssi
- Rail-to-rail input (sisäänmenot toimivat tavallista lähemmäs käyttöjännitteitä)
- Vakaa toiminta yksikkövahvistuksella (unity-gain stable)
- Kyky ajaa reaktiivisia kuormia
- Suuri ulostulojännite tai -virta
- Sisäiset suojaukset jännitepiikkejä, oskilloimista, kuumenemista ja oikosulkuja vastaan

Osa ominaisuuksista on toisensa poissulkevia. Esimerksiksi CMOS-transistoreilla toteutetun rail-to-rail inputin offset-jännite muuttuu selvästi lämpötilan ja sisäänmenojännitteiden mukaan.

3. Ulostulojännite, joka voi olla joko positiivinen tai negatiivinen riippuen yhden vastuksen resistanssista, voidaan toteuttaa esim. Wheatstonen sillalla:



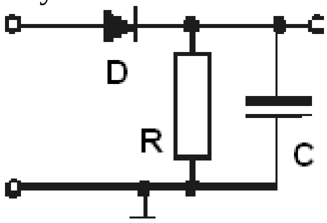
$$u_o = \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right) E$$

R_3 on nyt PT100. Silta on tasapainossa kun $R_1/R_3 = R_2/R_4$. 75 C:ssä $R_3 = 129\ \Omega$. Sovituksen voi tehdä symmetrisesti n.e. R4 = 129 Ω. Nyt haluttu dynamiikka toteutuu kun $R_1 = R_2$. Vaatimus että piiri saa kuluttaa korkeintaan 1 mA toteutuu kun kummankaan haaran läpi erikseen ei kulje yli 0.5 mA. Tällöin R = E/I = 5 V / 0.5 mA = 10 kΩ. Valitsemme siis $R_1 = R_2 = 10$ kΩ.

4. a) Modulointa käytetään paljon tietoliikennetekniikassa. Ideana on siirtää matalataajuinen signaali korkeataajuiseen kantoaaltoon moduloituna. Tällöin elektroniikan ja antennitekniikan suunnittelu helpottuu, SNR saadaan pidettyä suurena ja rajalliseen taajuusalueeseen saadaan mahdutettua useampia erillisiä signaaleja.

Taajuusmodulaatiossa (FM) kantoaallon taajuutta moduloidaan ja vaihemodulaatiossa (PM) vaihetta. Amplitudimodulaation (AM) tapauksessa muutetaan kantoaallon voimakkuutta.

b) Esimerkiksi alla esitetty kytkentä käy tarkoitukseen:



Diodi päästää läpi vain positiivisen jännitekomponentin ja RC-alipäästösuodin poistaa kantoaallon aiheuttaman vaihtelun. Tuloksena on alkuperäisen signaalin verhokäyrä (envelope).

5. a) Kovarianssi määritellään matemaattisesti kahden (satunnais)muuttujan *X* ja *Y* välillä seuraavasti:

$\mathrm{cov}(X,Y)=E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))$,

missä E on odotusarvo-operaattori, $E(X)=\mu_X$ ja $E(Y)=\mu_Y$.

Käytännössä kovarianssi on kahden muuttuja välisen riippuvuuden mitta. Kovarianssi on sitä suurempi mitä suurempi positiivinen lineaarinen riippuvuus muuttujien välillä on. Esimerkiksi mitä lämpimämpi ilma ulkona on, sitä enemmän jäätelöä ostetaan. Negatiivinen kovarianssi kertoo negatiivisesta lineaarisesta riippuvuudesta. Mitä lämpimämpi ulkona on, sitä vähemmän toppatakkeja ostetaan. Jos muuttujien välillä ei ole riippuvuutta, tai riippuvuus ei ole lineaarinen, kovarianssi on nolla. Ulkolämpötilan ja ohi kiitävien autojen värien välillä ei ole riippuvuutta.

(Ei vaadita vastaukseen:) Odotusarvo on ”satunnaismuuttujan jakauman painopiste”, usein mitattujen arvojen keskiarvo. Huom. Tutumpi varianssi, var(X)=cov(X,X). Korrelaatio(kerroin) on kovarianssi skaalattuna välille -1…1.

b) Kovarianssi voi olla haitaksi tutkimuksessa, mikäli sitä esiintyy muiden kuin mitattavien muuttujien välillä. Kovarianssin takia tutkimuksen johtopäätökset saattavat olla väärät. Esimerkkinä tutkimus, jossa tutkitaan laihdutusvalmisteen tehoa miesten ja naisten välillä. Tutkimuksessa havaitaan, että miehet laihtuvat (kilogrammoissa mitattuna) keskimäärin enemmän kuin naiset. Kuitenkin, mikäli miesten lähtöpaino on suurempi kuin naisten, kovarianssi lähtöpainon ja laihdutettujen kilojen välillä voi selittää löydetyt sukupuolierot. *Laihdutusvalmiste ei siis tehoa miehiin paremmin kuin naisiin, vaan se toimii painavampiin ihmisiin paremmin kuin kevyempiin ihmisiin.*
Huom, jos painonmuutos suhteutetaan alkupainoon (mitataan siis suhteellinen painonmuutos), ero miesten ja naisten välillä ei juuri ja juuri ole tilastollisesti merkittävä. Tämä on siis yksi tapa ottaa alkupaino huomioon, kovariaatti (katso kohdan c) vastaus) on toinen.

c) Regression to Mean (RTM) on tilastollinen artefakti, joka on läsnä aina kun muuttujaa mitataan kahdesti tai useammin, ja tähän muuttujaan liittyy satunnaista vaihtelua. (Tapaus, jossa muuttuja on normaalijakautunut, on ehkä helpoin ymmärtää, koska siinä keskivertoarvojen saaminen on todennäköisempää kuin laita-arvojen saaminen.) Esimerkiksi pallonheittokilpailussa jokainen henkilö heittää palloa kahdesti. Tuloksiin vaikuttaa kilpailijan kykyjen lisäksi myös satunnaiset tekijät. Kilpailussa henkilö, joka sattumalta heittää tavallista pidemmälle, heittää todennäköisesti seuraavaksi lyhyemmälle. Toisaalta, kilpailija joka sattumalta heittää tavallista heikommin, todennäköisesti heittää seuraavalla kerralla pidemmän heiton. Toisin sanoen, selkeästi normaalia lyhyemmän tai pidemmän heiton jälkeen tulee yleensä heitto, joka on lähempänä kilpailijan keskiarvosuoritusta. Tämä toimii myös käänteisesti: jos toinen heitto on selkeästi tavallista pidempi/lyhyempi, ensimmäinen heitto on todennäköisesti ollut lähempänä keskiarvoa.

Mitäpä jos ensimmäisen heiton jälkeen valitaan huonoimmat heittäjät ja tutkitaan parantaako kannustuspuhe heidän toisen heittonsa tuloksia? RTM efekti pitää huolen, että todennäköisesti tämän ryhmän tulokset paranevat kannustuspuheesta riippumatta.

(Tästä eteenpäin ei vaadita vastaukseen:) ANOVAssa (analysis of variance) eli varianssianalyysissa tutkitaan eroavatko kahden tai useamman ryhmän keskiarvot toisistaan tilastollisesti merkittävästi. ANCOVAssa (analysis of covariance) eli kovarianssianalyysissa huomioidaan lisäksi itse tutkittavien muuttujien lisäksi apumuuttujia, joita kutsutaan <u>kovariaateiksi</u>. Kohdan b) esimerkissä henkilöiden lähtöpaino voisi olla tällainen kovariaatti. Tällöin tutkimuskysymys kuuluisi, vaikuttaako laihdutusvalmiste miesten tai naisten painoon eri tavalla, *mikäli heidän alkupainonsa olisi sama*. Kovariaatti on siis muuttuja, joka saattaa vaikuttaa tutkimuksen tuloksiin, ja joka tulisi ottaa huomioon, mutta joka ei ole suoranaisesti kiinnostava tutkimuksen kannalta. Kovarianssianalyysilla voidaan voidaan poistaa RTM artefaktia valitsemalla henkilöiden ensimmäisen heiton tulos kovariaatiksi.

<u>Esimerkki miten kovariaatin huomioimatta jättäminen voi vääristää tuloksia:</u>

Tarkastellaan b)-kohdan esimerkkiä. Taulukossa 1 on mittaustulokset miesten ja naisten painosta ennen ja jälkeen laihdutusvalmisteen käyttöä. Keskimäärin näyttäisi siltä, että laihdutusvalmiste on vähentänyt miesten painoa enemmän kuin naisten painoa (13,5±10,1 kg vs. 5,5±5,2 kg). Jos unohdamme henkilöiden alkupainot ja teemme tilastollisen ANOVA-testin (tässä tapauksessa pelkkä t-testi), jossa vertaamme onko miesten ja naisten painojen *muutoksilla* eroa, saamme tulokseksi, että on: ”Sig.” eli p=0.038. p-arvoja, jotka ovat pienempiä kuin 0.05, voidaan pitää tilastollisesti merkittävinä. Tämä näkyy Taulukosta 2, joka on tehty käyttäen SPSS-ohjelmaa (SPSS löytyy ohjelmistojakelusta, myös Matlabilla jonkinlaiset ANOVA/ANCOVA valmiudet. Huom, Matlabissa ANCOVA on nimellä ANOCOVA. Excelillä pystynee vain ANOVAan ja tarvitset Analyysityökalut).

Taulukko 1. Laihdutusvalmistetutkimus.

	Miehet Alkupaino (kg)	**Loppupaino (kg)**	**Muutos (kg)**	**Naiset Alkupaino (kg)**	**Loppupaino (kg)**	**Muutos (kg)**
	120	100	20	89	78	11
	110	90	20	78	77	1
	98	76	22	88	80	8
	105	100	5	109	109	0
	89	88	1	110	100	10
	79	80	-1	115	101	14
	109	80	29	85	80	5
	108	99	9	95	97	-2
	90	70	20	80	75	5
	100	90	10	79	76	3
Keskiarvo	**100.8**	**87.3**	**13.5**	**92.8**	**87.3**	**5.5**
Hajonta	**12.2**	**10.6**	**10.1**	**13.9**	**12.9**	**5.2**

Jos teemme saman testin uudestaan, mutta otamme henkilöiden alkupainon huomioon kovariaattina (ANCOVA), saamme tulokseksi, että miesten ja naisten painojen muutoksilla ei olekaan eroa (p=0.113). Tämä näkyy Taulukossa 3.

Taulukko 2. ANOVA (ei alkupaino-kovariaattia).[1]

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: 'Muutos'

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	320.000[a]	1	320.000	4.996	.038
Intercept	1805.000	1	1805.000	28.179	.000
Sukupuoli	320.000	1	320.000	4.996	.038
Error	1153.000	18	64.056		
Total	3278.000	20			
Corrected Total	1473.000	19			

a. R Squared = .217 (Adjusted R Squared = .174)

1

- Varianssianalyysin avulla datassa esiintyvä vaihtelu, jota kuvataan neliösummilla ("Sum of squares"), hajoitetaan eri lähteistä peräisin oleviin osiin. "Sukupuoli"-neliösumma kuvaa sukupuolten välisistä eroista johtuvaa vaihtelua painonmuutoksessa. Tästä rivistä olemme erityisen kiinnostuneita. "Corrected Model"-neliösumma kuvaa kaikkien faktorien yhteisvaikutuksen vaihtelua. Koska tässä mallissa on vain yksi faktori, 'Sukupuoli' (jossa on kaksi ryhmää, miehet ja naiset), "Corrected Model"-neliösumma on sama kuin "Sukupuoli"-neliösumma. "Error"-neliösumma kuvaa sitä osaa vaihtelusta, jota ei kyetä selittämään ryhmien (tässä miehet vs. naiset) välisillä eroilla. "Intercept"-neliösumma kertoo koko datan poikkeamisesta nollasta. Yleensä tämä termi ei ole kiinnostava. "Total"-neliösumma kuvaa aineiston kokonaisvaihtelua. "Corrected Total"-neliösumma on faktorien yhteisvaikutuksen ja virheen vaihtelu, eli "Corrected Total"-neliösumma = "Corrected Model"-neliösumma+"Error"-neliösumma. "Type III" viittaa tapaan, jolla varianssin hajotelma on tehty. "Type III" on yleisin, eikä muita tyyppejä joudu yleensä käyttämään.
- Tilastolliseen testaukseen (p-luvun laskemiseen) tarvitaan eri osien variansseja. Neliösummat eivät suoraan kelpaa varianssien estimaateiksi, vaan neliösummat täytyy jakaa vapausasteillaan: "df", degrees of freedom, eli vapausasteiden lukumäärä. Neliösumman vapausasteluku on siinä olevien yhteenlaskettavien lukumäärä vähennettynä estimoitujen keskiarvojen lukumäärällä. Esim. $df_{Sukupuoli}=k-1$, $df_{Error}=k*n-k$, $df_{CorrTotal}=k*n-1$, missä k=ryhmien lukumäärä=2 ja n=havaintojen (henkilöiden) lukumäärä ryhmää kohden=10.
- Kun neliösummat jaetaan vapausasteluvuillaan, saadaan eri vaihtelulähteisiin liittyvät keskineliöt ("Mean Square").
- F-suhde on testisuure, johon ryhmien keskiarvojen vertailu perustuu. Se on ryhmien välisen vaihtelun ja ryhmien sisäisen vaihtelun suhde. Esimerkiksi $F_{Sukupuoli}=MeanSquare_{Sukupuoli}/MeanSquare_{Error}$. Mitä suurempi $F_{Sukupuoli}$ on, sitä suurempi sukupuolten välisten painonmuutosten vaihtelu on verrattuna sukupuolten sisäisten painonmuutosten vaihteluun.
- "Sig" eli p-arvo kertoo tilastollisesta merkittävyydestä. Mitä pienempi p-arvo, sitä merkittävämpi efekti. $p<0.05$ pidetään usein tilastollisen merkittävyyden rajana. p-arvon saa F-jakauman taulukosta (tai esim. Matlabilla: 1-fcdf(F-suhde,df1,df_2)) kun tietää F-suhteen osoittajan ("se ylempi") ja nimittäjän ("se alempi") vapausasteet. Esim. $F_{Sukupuoli}=MeanSquare_{Sukupuoli}/MeanSquare_{Error}=4.996$. $df_1=df_{Sukupuoli}=1$, $df_2=df_{Error}=18$.

Taulukko 3. ANCOVA (alkupaino-kovariaatti huomioitu).[2]

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: 'Muutos'

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	559.116[a]	2	279.558	5.200	.017
Intercept	99.124	1	99.124	1.844	.192
Alkupaino	239.116	1	239.116	4.448	.050
Sukupuoli	150.308	1	150.308	2.796	.113
Error	913.884	17	53.758		
Total	3278.000	20			
Corrected Total	1473.000	19			

a. R Squared = .380 (Adjusted R Squared = .307)

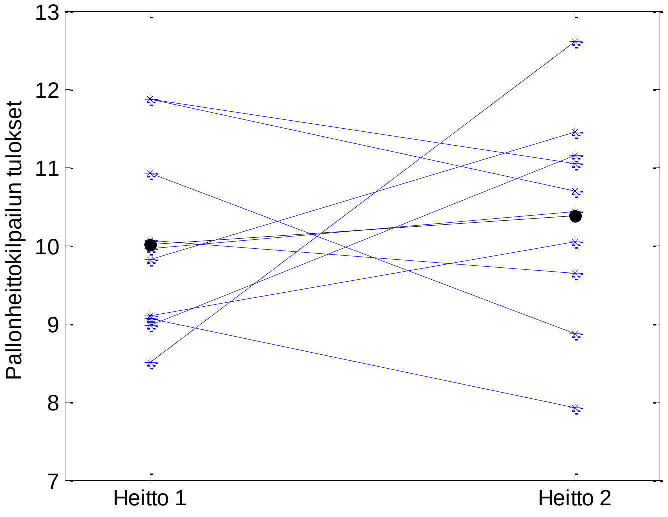
Esimerkki RTM:n vaikutuksista tuloksiin ja miten ANCOVA poistaa RTMn.

Edellisessä esimerkissä ei kyseessä ollut RTM:n vaikutus mittaustuloksiin, sillä toisiinsa verrattavat muuttujat (naisten painonmuutos ja miesten painonmuutos) olivat toisistaan riippumattomia. Palataan pallonheittokilpailuun. Tamän esimerkin toistomittauksessa ("repeated measures design") RTM on selvässä roolissa. Kymmenen ihmistä kilpailee pallonheittokilpailussa. Jokainen heittää kahdesti. Tutkimuksessa halutaan tietää paraneeko tulos toisella heitolla. Taulukossa 4 on Heittojen 1 ja 2 tulokset. Data on simuloitua ($Heitto1_i=10+\varepsilon_i$ ja $Heitto2_j=10.5+\varepsilon_j$, jossa i=1:10 ja j=1:10 ja ε_i ja ε_j ovat normaalijakautuneita, satunnaisia virheitä, joiden keskiarvo on 0 ja hajonta 1), joten tiedämme, että Heittojen 2 pitäisi olla keskimäärin 0.5 pistettä suurempi (tulokset paranevat kuitenkin keskimäärin vain 0.4 pistettä (10.4-10) johtuen otoksen pienestä koosta). Tärkeää: kuvaajasta 1 näkee RTM efektin, eli että henkilöt, joiden ensimmäinen heitto oli keskimääräistä isompi, seuraava heitto oli yleensä pienempi ja toisinpäin.

Taulukko 4. Pallonheittokilpailun tulokset

Henkilö#	**Heitto 1**	**Heitto 2**
1	9.81	11.45
2	11.86	10.70
3	8.50	12.60
4	8.98	11.15
5	9.06	7.92
6	10.92	8.87
7	9.95	10.43
8	11.86	11.04
9	9.09	10.05
10	10.07	9.64
Keskiarvo	**10.0**	**10.4**
Hajonta	**1.2**	**1.3**

[2] Mallin vapausasteluku ("Corrected Model", df), on kovariaatista johtuen 2: $df_{Corr.Model}=k-1+N_{cov}$, jossa k=2=ryhmien määrä (naiset ja miehet) ja $N_{cov}=1$=kovariaattien määrä (alkupaino).



Kuva 1. Taulukon 4 Pallonheittokilpailun tulokset.
Musta viiva on kummankin heiton keskiarvoviiva.

RTM-efekti voidaan poistaa.
Voimme toistaa edellisen esimerkin tilastolliset testit (ottaen huomioon toistomittaukset, eli käyttäen ”repeated measures design”-vaihtoehtoa). Ensin vertaamme ensimmäistä ja toista heittoa toisiinsa ja tämän jälkeen toistamme testin liittämällä ensimmäisen heiton tuloksen kovariaatiksi. Ilman kovariaattia tehdyssä tilastollisessa testissä ei näy eroa ensimmäisen ja toisen heiton välillä (vaikka tiedämme että oikea tulos on ero=+0.5, Taulukko 5), mutta kovariaatin lisäämisen jälkeen heittojen välillä näkyy tilastollinen ero (Taulukko 6). Ensimmäinen heitto -kovariaatin lisääminen siis poisti RTM-artefaktin ottamalla huomioon heittojen riippuvuuden ensimmäisestä heitosta.

Taulukko 5. ANOVA (ei Heitto1-kovariaattia)[3]

[3] “Sphericity” eli sfäärisyys (”pallomaisuus”) tarkoittaa ryhmien välisten erojen varianssien yhtäsuuruutta. Se on yksi oletuksista, jonka erityisesti toistomittausdatan on täytettävä, jotta ANOVA/ANCOVA voidaan tehdä luotettavasti. Tässä esimerkissä sillä ei ole juurikaan väliä, koska ryhmiä on vain 2 (Heitto1 ja Heitto2) ja ryhmien välille voi laskea vain yhden ryhmien välisen eron (Heitto1-Heitto2), joten erojen variansseja ei voi verrata. Sfäärisyyden voi testata Mauchly's Test of Sphericity –testillä. Mikäli sfäärisyyden oletusta ei ole rikottu, p-arvon (”Sig.”) voi lukea riviltä ”Sphericity assumed”, muuten p-arvo on luettava seuraavilta kolmelta riviltä, joilla on eri tavoin pyritty huomioimaan sfäärisyysehdon rikkoutuminen. Käytännössä ”Lower-Bound” -korjausta ei enää käytetä.

Tests of Within-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1

Source		Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Heitto	Sphericity Assumed	.703	1	.703	.399	.543
	Greenhouse-Geisser	.703	1.000	.703	.399	.543
	Huynh-Feldt	.703	1.000	.703	.399	.543
	Lower-bound	.703	1.000	.703	.399	.543
Error(Heitto)	Sphericity Assumed	15.857	9	1.762		
	Greenhouse-Geisser	15.857	9.000	1.762		
	Huynh-Feldt	15.857	9.000	1.762		
	Lower-bound	15.857	9.000	1.762		

Taulukko 5. ANCOVA (Heitto1-kovariaatti huomioitu)

Tests of Within-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1

Source		Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Heitto	Sphericity Assumed	8.258	1	8.258	8.225	.021
	Greenhouse-Geisser	8.258	1.000	8.258	8.225	.021
	Huynh-Feldt	8.258	1.000	8.258	8.225	.021
	Lower-bound	8.258	1.000	8.258	8.225	.021
Heitto * Heitto1cov	Sphericity Assumed	7.824	1	7.824	7.793	.024
	Greenhouse-Geisser	7.824	1.000	7.824	7.793	.024
	Huynh-Feldt	7.824	1.000	7.824	7.793	.024
	Lower-bound	7.824	1.000	7.824	7.793	.024
Error(Heitto)	Sphericity Assumed	8.032	8	1.004		
	Greenhouse-Geisser	8.032	8.000	1.004		
	Huynh-Feldt	8.032	8.000	1.004		
	Lower-bound	8.032	8.000	1.004		

Take home message: Koejärjestelyjä suunnitellessa pitää miettiä mitkä kaikki asiat vaikuttavat tutkittavaan kohteeseen, esimerkiksi henkilöiden laihtumiseen. Onko naisten ja miesten alkupainot keskimäärin samat, onko ryhmien välillä eroja liikuntatottumuksissa, onko molempien ryhmien motivaatio samaa tasoa (ovatko miehet varmasti yhtä halukkaita nauttimaan suklaanmakuista laihdutuslitkua kuin naiset?), jne. Toistomittauksissa tulee huomioida mahdollinen RTM-artefakti.